錐最適化における2乗スラック変数法

Squared Slack Variables Method in Conic Optimization

福嶋 雅夫（京都情報大学院大学）

Masao Fukushima（The Kyoto College of Graduate Studies for Informatics）

Abstract

錐最適化問題は数理最適化における基本的な問題のクラスであり，そのサブクラスである線形計画問題は実社会の問題解決において最もよく用いられてきた数学問題の一つである。錐最適化問題に対する研究の歴史は長いが，線形計画問題に対する内点法などの効率的解法の開発に伴い，実用面でも新しい応用領域が次々と開拓されている。本稿では錐最適化問題の重要なサブクラスであるいくつかの問題に対して，筆者らが近年行った2乗スラック変数法に関する研究を紹介する。

The conic optimization problem is a fundamental class of mathematical optimization problems, and contains the linear programming problem as its subclass, which is well-known as one of the most popular mathematical models for solving the real world problems. Although research on conic optimization has a long history, recent advances in efficient computational methods such as interior point methods have prompted development of new application areas. This article gives a brief summary of the recent work of the author and his co-workers on the squared slack variable approach to several important classes of the conic optimization problem.

1．はじめに

数理最適化あるいは数理計画とは，現実のさまざまな問題を「いくつかの制約条件のもとで目的関数と呼ばれる評価尺度を最大化または最小化する」という形の数理モデルに定式化し，それを問題のタイプに応じて開発されたアルゴリズムを用いて解くことにより，問題解決に役立つ情報を提供する方法論の体系である。現代の数理最適化の出発点は線形計画問題に対するシンプレックス法（単体法）や双対理論など1940年代の研究に遡る。1940年代といえばノイマン型コンピュータが提唱され，プログラム内蔵式コンピュータの開発が進められた時代であり，現在に繋がるコンピュータ社会の夜明けであった。その後のコンピュータ技術の目覚ましい進歩と歩調を合わせるように，数理最適化の研究も線形計画問題から様々なタイプの非線形最適化問題や組合せ最適化問題に対象を広げ，その適用領域を拡張している。

数理最適化の歴史には様々なブレークスルーが存在するが，その一つが線形計画問題に対する新しい解法として1984年に提案された内点法である [8]。内点法は大規模な線形計画問題に対する計算効率がシンプレックス法を凌ぐという大きなインパクトを与えただけでなく，線形計画問題を含む問題のクラスである半正定値計画問題や2次錐計画問題といった重要な応用をもつ凸最適化問題にも内点法の計算原理が拡張できることが明らかになった。これにより1990～2000年代には数理最適化の様々な応用分野が開拓されていった。その拡張の理論的根拠となったのは，半正定値計画問題や2次錐計画問題に含まれる錐制約が対称錐と呼ばれる凸錐のクラスに属し，また対称錐はユークリッド的ジョルダン代数と呼ばれるベクトル空間と深く関わっていることから，その性質を用いて統一的な扱いが可能になるという事実であった。

錐最適化問題に対しては現在に至るまで様々な研究が行われているが，本稿では凸性を仮定しない一般の非線形錐最適化問題に対して筆者らが行った2乗スラック変数法に関する一連の研究 [4,5,9,10] の成果を紹介する。

２．錐最適化問題

標準的な不等式制約付き最適化問題は次のように表される。

$$\text{Min} \quad f(x) \qquad (1)$$
$$\text{s.t.} \quad g_i(x) \geq 0 \ (i = 1, 2, \cdots, m)$$

ここで，x は n 次元変数ベクトル $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathrm{R}^n$，$f : R^n \to R$ および $g_i : R^n \to R$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ は十分滑らかな関数である。

この問題は f が凸関数で，g_i がすべて凹関数のとき凸最適化問題あるいは凸計画問題と呼ばれる。特に f と g_i がすべて 1 次関数ならば線形計画問題である。なお，以下の議論は，等式制約を含む問題に対しても自然に拡張できるが，表記の煩雑さを避けるため，不等式制約のみを含む場合を考える。

問題 (1) の制約条件は，関数 g_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$ を成分とするベクトル値関数 $g : R^n \to R^m$ を用いて

$$g(x) \in R^m_+$$

と表されることに注意する。ただし，R^m_+ は空間 R^m の非負象限 $\{y \in R^m \mid y_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \cdots, m)\}$ である。

ベクトル空間 V の部分集合 X に属する任意のベクトル v と任意のスカラー $\alpha \geq 0$ に対して αv がまた V に属するとき，X を錐と呼び，凸集合かつ閉集合であるような錐を閉凸錐という。上述の R^m の非負象限 R^m_+ は閉凸錐である。さらに，R^m_+ は m 個の半空間 $\{y \in \mathrm{R}^m \mid y_i \geq 0\}$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ の共通部分として表される。このように，有限個の半空間の共通部分であるような閉凸錐を凸多面錐という。このことから，不等式制約付き最適化問題 (1) は凸多面錐制約を含む最適化問題ということができる。

錐最適化問題あるいは錐計画問題はこれを拡張した問題であり，次のように表される。

$$\text{Min} \quad f(x) \qquad (2)$$
$$\text{s.t.} \quad g(x) \in X$$

ここで $g : R^n \to V$ はベクトル値関数であり，X はベクトル空間 V の閉凸錐である。X が一般の閉凸錐の場合は，この問題は必ずしも扱いやすいとは限らない。しかし，以下に述べるいくつかの特別な閉凸錐の場合には，現実に様々な応用があり，また問題の性質を利用した効果的なアプローチが開発されている。

(a) X が R^m の非負象限 R^m_+ の場合。

このとき問題 (2) は上述の標準的な不等式制約付き最適化問題になる。線形計画問題や通常の非線形計画問題が含まれる。

(b) X が 2 次錐の直積集合の場合。

m 次元ベクトル $y = (y_0, y_1, \cdots, y_{m-1})$ を $y = (y_0, \bar{y}) \in R \times R^{m-1}$ と書く。ここで $\bar{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_{m-1})$ である。そのとき，次式で定義される集合を m 次元 2 次錐と呼ぶ。

$$K^m = \{ y = (y_0, \bar{y}) \in R \times R^{m-1} \mid y_0 \geq \| \bar{y} \| \}$$

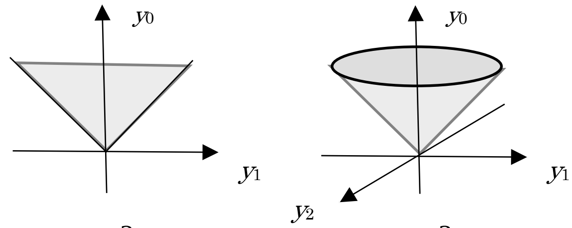
ただし，$\| \cdot \|$ はユークリッドノルムを表す。特に 1 次元 2 次錐と 2 次元 2 次錐はそれぞれ

$$K^1 = \{ y \in R \mid y \geq 0 \}$$
$$K^2 = \{ y = (y_0, y_1) \in R \times R \mid y_0 \geq | y_1 | \}$$

であるから，凸多面錐である。一方，$m \geq 3$ のときは

$$K^m = \{ y \in R^m \mid y_0 \geq \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{m-1}^2} \}$$

であり，有限個の半空間の共通部分としてあらわすことはできないので凸多面錐ではない。



$m = 2$ 　　　　　$m = 3$

このように，2 次錐は，凸多面錐の場合（$m = 1$ または $m = 2$）とそうでない場合（$m \geq 3$）でその性質が大きく異なる。例えば，問題 (2) において X が 2 次錐で，目的関数 f と制約関数 g が一次関数のとき，$m < 3$ の場合には問題 (2) は線形計画問題であるが，$m \geq 3$ の場合は非線形計画問題になる。このように 2 次錐はそれ自身がある種の非線形性を有していることに注意が必要である。このことは後述する半正定値錐や対称錐においても同様である。

問題 (2) の制約条件に含まれる閉凸錐が 2 次錐であるとき，この問題を 2 次錐計画問題という。ただし，現実の応用に現れる数理モデルでは一つだけの 2 次錐を含むケースは少なく，多くの場合 X はいくつかの 2 次錐の直積の形で与えられる（いくつかの錐の直積は錐である）。すなわち，一般的な 2 次錐計画問題は次のように表される。

$$\text{Min} \quad f(x) \qquad (3)$$
$$\text{s.t.} \quad g_i(x) \in K^{m_i} \ (i = 1, 2, \cdots, r)$$

ここで $g_i : R^n \to R^{m_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ はそれ自身 m_i 次元ベクトル値関数であり，K^{m_i} は m_i 次元 2 次錐である。

ここで 1 次元 2 次錐が $K^1 = \{y \in R \mid y_0 \geq 0\}$ であったことに留意すると，$m_1 = m_2 = \cdots = m_r = 1$ であれば，問題 (3) は問題 (1) に帰着することがわかる。すな

わち，2 次錐計画問題は標準的な不等式制約付き問題 (1) をその特別な場合として含んでいる。

(c) X が半正定値錐の場合。

m 次実対称行列の集合を S^m と書く。S^m はベクトル空間であり，その部分集合である m 次半正定値行列全体の集合

$$S^m_+ = \{A \in S^m \mid x^T Ax \geq 0 \ \forall x \in R^m\}$$

は S^m の閉凸錐である（^{T} は転置記号）。これを半正定値錐という。

半正定値錐 S^m_+ を制約条件に含む錐計画問題を半正定値計画問題と呼ぶ。そのとき問題 (2) は次のように表される。

$$\begin{aligned} &\text{Min} \ \ f(x) \\ &\text{s.t.} \ \ \ G(x) \in S^m_+ \end{aligned} \qquad (4)$$

ここで $G: R^n \to S^m_+$ は（対称）行列値関数，変数は n 次元ベクトル $x \in R^n$ である。（変数が対称行列であるような半正定値計画問題の定式化も考えられるが，問題 (4) の定式化と本質的な違いはない。）

2 次錐の場合と同様，$m \geq 2$ の半正定値錐も凸多面錐として表せない，非線形性を有する錐である。よって，たとえ関数 f と G が 1 次関数であっても，問題 (4) は非線形最適化問題となる。

2 次錐制約 $y = (y_0, \bar{y}) \in K^m$ は対称行列

$$Y = \begin{bmatrix} y_0 & \bar{y}^T \\ \bar{y} & y_0 I \end{bmatrix} \in S^m$$

に対する半正定値条件 $Y \in S^m_+$ として表すことができる。したがって，半正定値計画問題は 2 次錐計画問題を特別な場合として含んでいるとみなせる。

(d) X が対称錐の場合。

2 次錐や半正定値錐を含む（抽象的であるが）一般的な概念に対称錐と呼ばれるものがある。まず，ベクトル空間 V において内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が定義されているとする。内積の定義は考えているベクトル空間によって定まる。例えば $V = R^m$ であれば，$x, y \in R^m$ に対して

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$$

であり，$V = S^m$ であれば，$A, B \in S^m$ に対して

$$\langle A, B \rangle = tr(AB) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{ij}$$

と定義される。

ベクトル空間 V の錐 X に対して

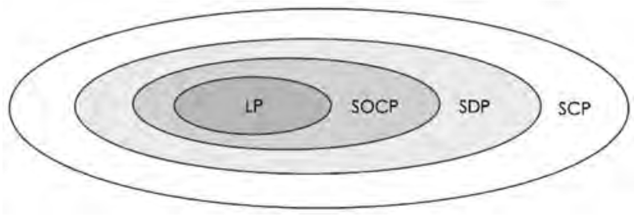
$$X^* = \{ y \in V \mid \langle x, y \rangle \geq 0 \ \forall x \in X \}$$

で定義される集合（凸錐）を X の双対錐と呼ぶ。$X = X^*$ であるような錐は自己双対であるという。また，錐 X に内点が存在し，任意の 2 つの内点 x, y に対して $T(x) = y$ かつ $T(X) = X$ となるような線形全単射 T が存在するとき，錐 X は等質であるという。そして, 自己双対で等質な錐を対称錐という。詳細は省略するが，2 次錐や半正定値行列錐は対称錐の特別な例であることがいえる。

対称錐計画問題は次のように表される。

$$\begin{aligned} &\text{Min} \ \ f(x) \\ &\text{s.t.} \ \ \ g(x) \in K \end{aligned} \qquad (5)$$

ここで $g: R^n \to V$ はベクトル値関数であり，K はベクトル空間 V の対称錐である。上に述べたことから, 半正定値計画問題 (4) や 2 次錐計画問題 (3)（その特別な場合である不等式制約の最適化問題 (1) も含む）は対称錐計画問題に含まれる（下図参照）。



LP: Linear Program（線形計画問題）

SOCP: Second-Order Cone Program（2 次錐計画問題）

SDP: Semidefinite Program（半正定値計画問題）

SCP: Symmetric Cone Program（対称錐計画問題）

非線形の問題にも同様の包含関係が成り立つ。

3．対称錐とユークリッド的ジョルダン代数

前節で述べた対称錐はユークリッド的ジョルダン代数と呼ばれるベクトル空間と深く関係している [3]。ベクトル空間 V において，次の性質 1 ～ 4 を満たす双線形写像 $\circ$（これをジョルダン積と呼ぶ）が定義されるとき，V をユークリッド的ジョルダン代数という。

1. $y \circ (y^2 \circ z) = y^2 \circ (y \circ z)$（ただし $y^2 = y \circ y$）
2. $y \circ z = z \circ y$
3. $y \circ e = e \circ y = y$（単位元 e の存在）
4. $\langle y \circ z, w \rangle = \langle y, z \circ w \rangle$

ここで，V のベクトル y と z のジョルダン積 $y \circ z$ はまた V のベクトルであることに注意しよう。ジョルダン積を用いて定義される集合

$$K = \{ z \in V \mid z = y \circ y \ \forall y \in V \}$$

は対称錐になることが知られている。この集合は 2

乗の錐と呼ばれる。

2次錐や半正定値錐は対称錐であるから，それらはそれぞれに対応するジョルダン代数におけるジョルダン積に関する2乗の錐として表されることになる。本稿で取り扱う2乗スラック乗数法はこの性質を利用した方法である。2乗スラック乗数法に進む前に，2次錐と半正定値行列錐に対するジョルダン積が具体的にどのように定義されるかを見ておこう。

A) 2次錐におけるジョルダン積

R^m の2つのベクトル $y = (y_0, \bar{y}) \in R \times R^{m-1}$ と $z = (z_0, \bar{z}) \in R \times R^{m-1}$ に対して，そのジョルダン積を

$$y \circ z = (\langle y, z \rangle, z_0 \bar{y} + y_0 \bar{z}) \in R \times R^{m-1}$$

で定義する。特に，ベクトル y と y のジョルダン積，すなわち y の2乗は

$$y \circ y = (\|y\|^2, 2y_0 \bar{y}) \in R \times R^{m-1}$$

であるから，2次錐 K^m の定義を思い出せば，$y \circ y \in K^m$ となることが簡単な計算により確かめられる。逆に，2次錐 K^m に属する任意のベクトル z に対して $z = y \circ y$ を満たすベクトル $y \in R^m$ が存在することもいえる。したがって，

$$K^m = \{z \in R^m \mid z = y \circ y \ \forall y \in R^m\}$$

が成り立つので，確かに2次錐はジョルダン積に関する2乗の錐になっている。

ところで，標準的な不等式制約つき最適化問題 (1) の制約条件は $g(x) \in R^m_+$ と表されるが，R^m_+ は非負実数の集合 $R_+ = \{y \in R \mid y \geq 0\}$ の m 重の直積であり，R_+ は1次元2次錐 K^1 と同一視できる。上で述べたことから

$$K^1 = \{z \in R \mid z = y \circ y = y^2 \ \forall y \in R\}$$

であるから，結局 R^m_+ は

$$R^m_+ = \{z \in R^m \mid z_i = y_i^2 \ \forall y_i \in R \ (i=1, 2, \cdots, m)\}$$

のように2乗の錐として表される。

B) 半正定値錐におけるジョルダン積

m 次対称行列 $X, Y \in S^m$ に対して，そのジョルダン積を次式で定義する。

$$X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX) \in S^m$$

特に，任意の $Y \in S^m$ に対して $Y \circ Y = YY$ は半正定値，すなわち $Y \circ Y \in S^m_+$ である。逆に，任意の半正定値行列 $X \in S^m_+$ に対して $X = Y \circ Y$ を満たす対称行列 $Y \in S^m$ が存在する。したがって

$$S^m_+ = \{X \in S^m \mid X = Y \circ Y \ \forall Y \in S^m\}$$

が成り立つので，確かに半正定値錐 S^m_+ はジョルダン積に関する2乗の錐である。

４．２乗スラック変数法

前節で述べた事実より，錐制約は新しい変数（スラック変数）を用いて（錐を含まない）通常の等式制約に書き換えることができる。まず，最も一般的な場合である，次の対称錐計画問題から考える。

$$\begin{aligned} &\text{Min} \ f(x) \\ &\text{s.t.} \ \ g(x) \in K \end{aligned}$$

対称錐 K は

$$K = \{z \in V \mid z = y \circ y \ \forall y \in V\}$$

と表されるので，x が制約 $g(x) \in K$ を満たすことは，$g(x) = y \circ y$ を満たす $y \in V$ が存在することと等価である。よって，上の対称錐計画問題は次の（錐制約を含まない）等式制約の非線形計画問題に変換できる。

$$\begin{aligned} &\text{Min} \ f(x) \\ &\text{s.t.} \ \ g(x) - y \circ y = 0 \end{aligned}$$

これが対称錐計画問題に対する2乗スラック変数法である（$y \in V$ はスラック変数）。

半正定値計画問題や2次錐計画問題，さらに標準的な不等式制約つき最適化問題はすべて対称錐計画問題の特別な場合であるから，それぞれの問題に応じて2乗スラック変数法を適用することにより，等式制約の非線形計画問題に変換できる。具体的には以下のようになる。

半正定値計画問題

$$\begin{aligned} &\text{Min} \ f(x) \\ &\text{s.t.} \ \ G(x) \in S^m_+ \end{aligned}$$

の場合，$S^m_+ = \{X \in S^m \mid X = Y \circ Y \ \forall Y \in S^m\}$ であるから，スラック変数として行列変数 $Y \in S^m$ を導入することにより次の問題を得る。

$$\begin{aligned} &\text{Min} \ f(x) \\ &\text{s.t.} \ \ G(x) - Y \circ Y = 0 \end{aligned}$$

2次錐計画問題

$$\begin{aligned} &\text{Min} \ f(x) \\ &\text{s.t.} \ \ g_i(x) \in K^{m_i} (i = 1, 2, \cdots, r) \end{aligned}$$

の場合も，$K^m = \{z \in R^m \mid z = y \circ y \ \forall y \in R^m\}$ であるから，スラック変数 $y_i \in R^{m_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ を用いて，次のように問題を変換できる。

$$\begin{aligned} &\text{Min} \ f(x) \\ &\text{s.t.} \ \ g_i(x) - y_i \circ y_i = 0 \ (i = 1, 2, \cdots, r) \end{aligned}$$

不等式制約付き最適化問題

$$\begin{aligned} &\text{Min} \ f(x) \\ &\text{s.t.} \ \ g_i(x) \geq 0 \ (i = 1, 2, \cdots, m) \end{aligned}$$

は m 個の（1次元）スラック変数 $y_i \in R$ $(i = 1, 2, \cdots,$

m) を用いて次のような等式制約の問題に変換できる。

$$\begin{aligned}&\text{Min}\ \ f(x)\\&\text{s.t.}\ \ g_i(x) - y_i^2 = 0\ (i = 1, 2, \cdots, m)\end{aligned}$$

なお，不等式制約つき最適化問題に対する 2 乗スラック変数法は非線形計画の分野で古くから知られていたが [1]，あまりメリットがないことから大きな注目を集めることはなかった。しかし，対称錐計画問題をはじめとする錐最適化問題においては，大きく事情は異なる。すなわち，2 乗スラック変数法により，錐制約がふつうの等式制約に変換されるので，錐制約を直接扱う代わりに通常の非線形最適化の理論と方法を適用することが可能となる。次節ではそのような観点から筆者らが行った研究の一端を紹介する。

5. 最適性条件

前節では，いくつかの錐最適化問題に対して，2 乗スラック変数を用いて錐制約を等式制約に変換した非線形最適化問題を示した。変換前の問題と変換後の問題は同じ最適解（大域的，局所的のいずれの意味でも）をもつという意味で等価である。しかしながら，一般に数理最適化問題を解く手法（アルゴリズム）は問題の 1 次の最適性条件（Karush-Kuhn-Tucker 条件あるいは KKT 条件と呼ばれる [6]）を満たす解（停留点と呼ばれる）を求めるように設計されている。ところが，上述の問題のペアについていえば，両者の問題の KKT 条件は互いに等価とは必ずしもいえない。より正確にいえば，変換後の問題を解いて得られる（KKT 条件を満たす）解は元の（変換前の）問題の KKT 条件を無条件に満たすとは限らず，それを保証するためには何か付加的な条件が必要になる。このことから，両者の問題の最適性条件を（KKT 条件だけでなく 2 次の条件，制約想定なども包括的に）調べることが重要になる。

さらに加えて，元の錐最適化問題の最適性条件を直接導出するには複雑な数学的な道具が必要であるが，変換後の問題は錐制約をもたない通常の最適化問題であるからそのような道具を必要としない。それにも関わらず，結果として錐最適化問題に対する最適性条件を導出できる。これも 2 乗スラック乗数法を用いることの利点の一つである。

以下では，前節で紹介した錐最適化問題のすべてに対して結果を示すかわりに，（ふつうの不等式制約の）非線形計画問題と，最も一般的な対称錐計画問題とに対する結果を述べ，2 次錐計画問題と半正定値計画問題については簡単に触れるにとどめる。

まず（ふつう不等式制約の）非線形計画問題

$$\begin{aligned}&\text{Min}\ \ f(x) && \text{(NP1)}\\&\text{s.t.}\ \ g_i(x) \geq 0\ (i = 1, 2, \cdots, m)\end{aligned}$$

と，これをスラック変数 $y_i \in R$ ($i = 1, 2, \cdots, m$) を用いて変換した等式制約の問題

$$\begin{aligned}&\text{Min}\ \ f(x) && \text{(NP2)}\\&\text{s.t.}\ \ g_i(x) - y_i^2 = 0\ (i = 1, 2, \cdots, m)\end{aligned}$$

を考える。前者の問題を (NP1), 後者の問題を (NP2) と呼ぶ。(NP1) と (NP2) はどちらも通常の非線形計画問題であるから，古典的な最適化理論が適用できて，(NP1) の KKT 条件は

$$\nabla f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x) = 0$$

$$\lambda_i \geq 0,\ g_i(x) \geq 0,\ \lambda_i\, g_i(x) = 0\ (i = 1, 2, \cdots, m)$$

であり，(NP2) の KKT 条件は

$$\nabla f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x) = 0$$

$$\lambda_i\, y_i = 0,\ g_i(x) - y_i^2 = 0\ (i = 1, 2, \ldots, m)$$

となる。ここで λ_i (i=1,2,...,m) はラグランジュ乗数である。この 2 つの KKT 条件を比較すると，(NP2) の KKT 条件には (NP1) の KKT 条件に含まれている条件 $\lambda_i \geq 0$ (i=1, 2,$\cdots$, m) が欠落していることがわかる。（それ以外の部分は見かけは異なるが実質的に等価である。）すなわち，(NP1) の停留点は (NP2) の停留点であるが，逆は必ずしも正しくない。したがって，(NP2) の停留点を求めても，それは元の問題 (NP1) の停留点であるとは限らない。

それでは 2 つの問題の停留点の等価性を保証するには何が必要であろうか。そこで重要な役割を果たすのが，2 次の十分条件 [6] と呼ばれる条件である。2 次の十分条件とは KKT 条件と組み合わせることにより，停留点が局所的最適解であることを保証できる条件である。(NP1) に対する 2 次の十分条件は，

$$\begin{aligned}&\nabla\ g_i(x)^T d = 0 \text{ if } g_i(x) = 0,\ \lambda_i > 0\\&\nabla\ g_i(x)^T d \geq 0 \text{ if } g_i(x) = 0,\ \lambda_i = 0\end{aligned}$$

(6)

を満たす任意のベクトル $d \neq 0$ に対して

$$d^T \nabla_x^2\, L(x, \lambda)\, d > 0 \qquad (7)$$

が成り立つことである。ここで L は次式で定義される (NP1) のラグランジュ関数である。

$$L(x,\lambda)=f(x)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x)$$

一方，(NP2) に対する 2 次の十分条件は

$$(\nabla g_i(x)^T, -2y_i e_i^T)\tilde{d}=0$$

を満たす任意のベクトル $\tilde{d}\neq 0$ に対して

$$\tilde{d}^T\nabla^2_{(x,y)}\tilde{L}(x,y,\lambda)\tilde{d}>0$$

が成り立つことである。ここで $\tilde{L}$ は次式で定義される (NP2) のラグランジュ関数である。

$$\tilde{L}(x,y,\lambda)=f(x)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(g_i(x)-y_i^2)$$

2 次の十分条件を考慮すれば，(NP2) の停留点が (NP1) の停留点になることだけでなく，それ以上の関係を示すことができる。

定理：1. (x,y) が (NP2) の 2 次の十分条件を満たす停留点であれば，x は (NP1) の 2 次の十分条件と狭義相補性を満たす停留点であり，その逆も成り立つ。

2. (x,y) が (NP2) の 2 次の十分条件と 1 次独立制約想定を満たす停留点であれば，x は (NP1) の 2 次の十分条件，狭義相補性，1 次独立制約想定を満たす停留点であり，その逆も成り立つ。

ここで，(NP1) の狭義相補性とは，KKT 条件における $\lambda_i g_i(x)=0$ を満たす λ_i と $g_i(x)$ のどちらか一方はゼロでないという性質であり，1 次独立制約想定とは停留点において等号が成り立っているすべての制約条件（有効制約という）の制約関数の勾配が 1 次独立であるという性質である。

上述の定理の結果は 2 次錐計画問題，半正定値計画問題，対称錐計画問題にも自然に拡張できる。ここではそれらの中で最も一般的な問題である対称錐計画問題

$$\begin{aligned}&\text{Min } f(x)\\&\text{s.t. } g(x)\in K\end{aligned}$$

と，錐制約をジョルダン積に関する 2 乗スラック変数を用いて等式制約に変換した非線形計画問題

$$\begin{aligned}&\text{Min } f(x)\\&\text{s.t. } g(x)-y\circ y=0\end{aligned}$$

について説明する。前者を (SCP1)，後者を (SCP2) と書く。(SCP1) の KKT 条件は，錐最適化の理論より

$$\nabla f(x)-Jg(x)^*\lambda=0$$
$$\lambda\in K, g(x)\in K, \lambda\circ g(x)=0$$

と書ける。ここで $Jg(x)$ は g のヤコビアン，$*$ は随伴を表す。一方，(SCP2) の KKT 条件は通常の最適化理論より

$$\nabla f(x)-Jg(x)^*\lambda=0$$
$$\lambda\circ y=0, g(x)-y\circ y=0$$

と表される。この場合も，前述の (NP1), (NP2) の場合と同様，(SCP2) の KKT 条件には (SCP1) の KKT 条件に含まれている条件 $\lambda\in K$ が欠落している。それ以外は，見かけは異なるが実質的に等価である。よって，(SCP1) の停留点は (SCP2) の停留点であるが，逆は必ずしも正しくない。

結論からいえば，(SCP2) の停留点が (SCP1) の停留点であるためには (SCP2) の停留点が (SCP2) に対する 2 次の十分条件を満たせばよい。(SCP2) はふつうの非線形計画問題であるから，2 次の十分条件は

$$Jg(x)v-2y\circ w=0$$

を満たす任意のベクトル $(v,w)\neq 0$ に対して

$$\langle(v,w),\nabla^2_{(x,y)}\tilde{L}(x,y,\lambda)(v,w)\rangle>0$$

が成り立つことである。ここで $\tilde{L}$ は次式で定義される (SCP2) のラグランジュ関数である。

$$\tilde{L}(x,y,\lambda)=f(x)-\langle\lambda, g(x)-y\circ y\rangle$$

さらに，前述の (NP1) と (NP2) に関する定理で述べたものと同様の結果を示すことができる。しかし，それを記述するためには，錐最適化問題に対する 2 次の十分条件，狭義相補性，非退化性（一次独立制約想定の拡張）などを定義する必要があるが，ここではこれ以上の深入りは避け，錐最適化問題における 2 次の最適性条件の本質に簡単に言及する。

凸多面錐上の最適化問題である (NP1) の 2 次の十分条件は式 (6) を満たすベクトルの集合上で，ラグランジュ関数のヘシアンが式 (7) を満たすこと，すなわち一種の正定値性を有することと特徴づけられる。しかし，多面錐ではない一般の凸錐は「境界面が曲がっている」ので，2 次の条件ではその曲率を考慮する必要が生じる [7]。これが多面錐と一般の凸錐（2 次錐，半正定値錐，対称錐を含む）の最大の相違である。

一般の凸錐制約つき最適化問題については，凸錐 K の点 z における接錐を $T_K(z)$ としたとき，停留点 x に対して

$$Jg(x)d\in T_K(g(x))$$

を満たす任意のベクトル $d\neq 0$ が

$$\langle d,(\nabla_x^2 L(x,\lambda)+\sigma(x,\lambda))d\rangle>0$$

を満たせば，停留点 x は局所的最適解になることが知られている。ここで，ラグランジュ関数のヘシアンに付加された項 $\sigma(x,\lambda)$ は凸錐 K の曲率を考慮したために生じたものでありシグマ項と呼ばれる。

シグマ項の具体的な形は 2 次錐計画問題や半正

定値計画問題については既知であるが [2,11]，対称錐計画問題を含む一般の錐最適化問題に対する研究はほとんど見当たらない。2 乗スラック変数法を用いると，2 次錐計画と半正定値計画に対するシグマ項が 2 次接錐のような変分解析の概念を使わずに導けるだけでなく，既存研究が存在しない対称錐計画問題の 2 次の最適性条件についてもその表現を得ることができる。

具体的には，対称錐計画問題 (SCP1) に対する 2 次の十分条件は以下のように表せる。すなわち，停留点 x において

$$Jg(x)v - 2\sqrt{g(x)} \circ w = 0$$

を満たす任意のベクトル $(v,w) \neq (0,0)$ に対して

$$\langle v, (\nabla_x^2 L(x,\lambda)v\rangle + 2\langle w \circ w, \lambda\rangle > 0$$

が成り立つならば，x は (SCP1) の局所的最適解である。ちなみに最後の不等式を

$$\langle v, (\nabla_x^2 L(x,\lambda)v\rangle + 2\langle w \circ w, \lambda\rangle \geq 0$$

と置き換えると 2 次の必要条件になることも示せる。この事実は，これらがある意味で最良の十分条件と必要条件のペアであることを示している。

6．おわりに

本稿では 2 乗スラック変数法を用いることにより錐最適化問題に対して新たなアプローチが可能となることを，主に理論面での成果 [4,5,9,10] をもとに紹介した。これに対して，2 乗スラック変数法のもう一つの側面は数値解法としての可能性である。半正定値計画問題や 2 次錐計画問題には，それらに特化したアルゴリズム（およびソルバ）が開発されているが，2 乗スラック変数を用いて問題を通常の非線形計画問題に変換すれば汎用の最適化ソルバによって問題を解くことも可能である。実際，2 次錐計画問題と半正定値問題のさまざまな問題例に対して計算実験を行ったところ，2 乗スラック変数法と汎用ソルバを組み合わせた方法のパフォーマンスは錐最適化問題に特化したソルバに匹敵することが観測された [4,9]。

謝辞　本稿は京都大学情報学研究科福田エレン秀美准教授，統計数理研究所 Bruno F. Lourenço 准教授との共同研究の成果に基づいている。

参考文献

[1] D.P. Bertsekas, *Nonlinear Programming*, 2nd Edition, Athena Scientific, 1999.

[2] J.F. Bonnans and C.H. Ramirez, Perturbation analysis of second-order cone programming, *Mathematical Programming* 104 (2005), pp. 205-227.

[3] J. Faraut and A. Korányi, *Analysis on Symmetric Cones*, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, 1994.

[4] E.H. Fukuda and M. Fukushima, The use of squared slack variables in nonlinear second-order cone programming, *Journal of Optimization Theory and Applications* 170 (2016), pp. 394-418.

[5] E.H. Fukuda and M. Fukushima, A note on the squared slack variables technique for nonlinear optimization, *Journal of the Operations Research Society of Japan* 60 (2017), pp. 262-270.

[6] 福島雅夫，『非線形最適化の基礎』，朝倉書店，2001.

[7] H. Kawasaki, An envelope-like effect of infinitely many inequality constraints on second-order necessary conditions for minimization problems, *Mathematical Programming* 41 (1988), pp. 73-96.

[8] 小島政和，土谷隆，水野眞治，矢部博，『内点法』，朝倉書店，2001.

[9] B.F. Lourenço, E.H. Fukuda and M. Fukushima, Optimality conditions for nonlinear semidefinite programming via squared slack variables, *Mathematical Programming* 168 (2018), pp. 177-200.

[10] B.F. Lourenço, E.H. Fukuda and M. Fukushima, Optimality conditions for problems over symmetric cones and a simple augmented Lagrangian method, *Mathematics of Operations Research* 43 (2018), pp. 1233-1251.

[11] A. Shapiro, First and second order analysis of nonlinear semidefinite programs, *Mathematical Programming* 77 (1997), pp. 301-320.

◆著者紹介

福嶋　雅夫　Masao Fukushima

京都情報大学院大学教授
京都大学工学研究科修了　工学博士
京都大学名誉教授
元南山大学大学院教授
元奈良先端科学技術大学院大学教授