虚数の虚数乗
i^i（愛の愛情）

Imaginary Powers of Imaginary Numbers

作花 一志（京都情報大学院大学）
Kazushi Sakka（The Kyoto College of Graduate Studies for Informatics）

Abstract

Complex powers of complex numbers are discussed. Some interesting results are:

・exponential function a^x can be defined for any a, and any x,

・i power of（cosθ+isinθ）, including i^i, is real number after simple calculations.

・the equation of $x^x=1$ has three solutions

i^i（愛の愛情）とは

Wikipedia には exp(－π/2) という実数でその値は 0.207879…であると記されている [1]。もちろん無理数だが，虚数の虚数乗が実数になることが不思議である。

指数関数の入門に戻って考えよう。2^3（＝ 8）とは 2 を 3 回かけたものであり 2^5（＝ 32）とは 5 回の積である。また 2^{-2} とは 1／2^2 のこと，すなわち指数がマイナスなら逆数をとればよい。では指数が分数，小数の場合はどうなるだろうか？ $2^{1/2}$ とは 2 乗して 2 になる数(すなわち 2 の平方根 $\sqrt{2}$) と $2^{1/5}$ とは 5 乗して 2 になる数（すなわち 2 の 5 乗根 $\sqrt[5]{2}$）と定義する。そうすれば $2^{3/5}=(2^{1/5})^3$ であるので一般に $2^{n/m}$ は 2 の m 乗根の n 乗と定義できる。$2^{3.14}$ は $2^{314/100}$ より求められ，結局 2^x において x が有理数の場合はすべて計算できることになる。その数値自身は無理数でペンと紙に書き記すことはできないが，確かに実在する数である。

では x が無理数の場合は？ 2^{π}，$2^{\sqrt{2}}$ などは実在するのだろうか？

π に収束する次のような無限数列を考えよう。

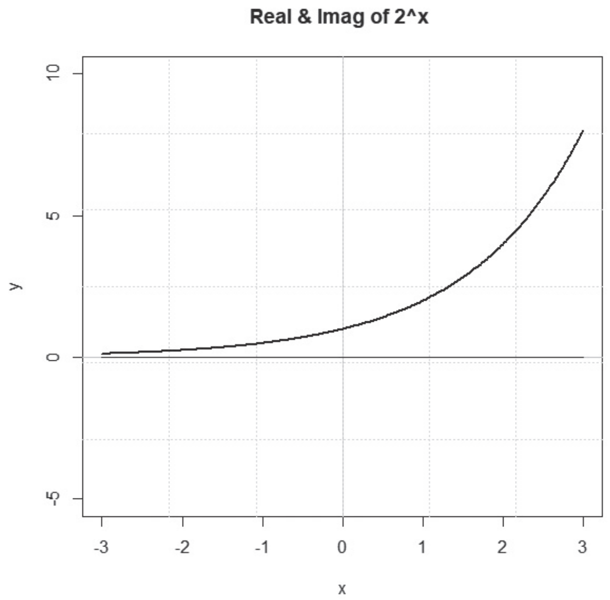
a_n={3, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, 3.141592 …}

これに対して次のような数列

b_n={ 2^3, $2^{3.14}$, $2^{3.141}$, $2^{3.1415}$, $2^{3.14159}$, $2^{3.141592}$ …}

は有理数であるが

n →∞において $a_n \to \pi$　$b_n \to 2^{\pi}$　となる（厳密には証明が要るが)。よってすべての実数 x において 2^x は計算できる。このように考えれば指数関数 $y=a^x$ は a> 1 なら単調増加，0<a<1 なら単調減少，そして a ＝ 1，a ＝ 0 なら一定である。



第 1 図　y=2^x 実部は太線　虚部細線は x 軸と重なっている

底が負数の場合

では a<0 の場合はどうであろうか？底がマイナスの場合の指数関数は定義しないことになっているが何とか定義できないものか？

例として f(x)=(－2)^x の場合を考えてみよう。この関数の値は x が整数の場合は実数だが，半整数の場合は虚数となる。

－2 を r(cos θ +isin θ) の形で複素数表示してみよう。r は絶対値，θ は偏角。

明らかに r ＝ 2，θ ＝ π であるから

y = (− 2)^x の実部, 虚部はそれぞれ 2^x (cos(x π)), 2^x (sin(x π)) となる。

x が整数の時　cos(x π) = ± 1　sin(x π) = 0 だから y は実数となり x が半整数の時 cos(x π) = 0　sin(x π) = ± 1　だから y は純虚数となる。

それ以外では一般に複素数値になる。

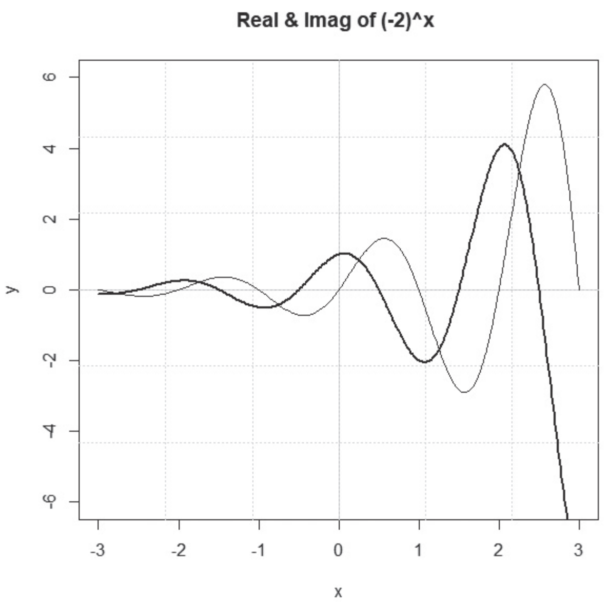
(− 2)^x = 2^x (cos(x θ)) + 2^x (sin(x θ)) i

R, WolframAlpha[2], gnuplot などを使ってその値を求めることができる。

表１　(− 2)^x の値

x	実部	虚部	偏角	備考
2	4	0	0	実数
1.52	0.1800776	− 2.862251	1.50796	
1.5	0,	− 2.828427	− π /2	虚数
0.1	1.019	0.331	0.314	
− 1.5	0	0.35355334	π /2	虚数

y=(− 2)^x のグラフは下図のように描ける。



第２図　y=(− 2)^x　太線は実部細線は虚部
(第５図まで共通)

これで底が負数の場合の指数関数の値が定義できた。

底が複素数の場合

これ以降は次の 3 つの公式を利用する。

z^x=exp(x*log(z))　①

log(z) = log(abs(z)) +iArg(z)　②

exp(i θ)=cos θ +isin θ　③

①は自明な式である。

② abs(z) は絶対値で Arg(z) は偏角である。

③は有名なオイラーの公式で, 指数関数と三角関数を結ぶ。

a^x=exp (xlog(a))　①

②より log(a) = log(abs(a)+iArg(a) であり

abs(a)=r　Arg(a)= θと置くと

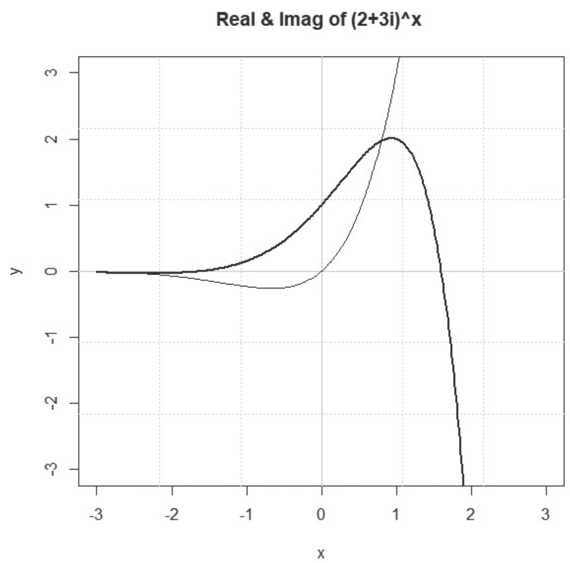
①は exp(x*(log(r))exp(i θ x))

=r^x exp(i θ x))

=r^x (cos(θ x)+isin(θ x))

これより①の実部, 虚部が求まった。

図 3 は a=2 + 3i すなわち r=√ (2^2+3^2)=√ 13, θ = tan^{-1}(3/2) の場合のグラフである。



第３図　y=(2 + 3i)^x

指数が虚数の場合

z^x の x が虚数の場合にも①②③を利用する。まず z が実数の場合, 2 と − 2 の場合は

z^x =2^i = exp(ilog2)

= cos(log2)+isin(log2)

z^x =(− 2)^i = exp(ilog(− 2)) = exp(i(log2+ π i))

=exp(ilog(2))exp(− π)

=2^i/exp(π)

次に z が虚数 (2i) の場合は

abs(2i)=2　Arg(2i)= π /2 だから

log(2i)=log2+i π /2

よって z^i =exp(i(log2))+i π /2)

= exp(i(log2))/exp(π /2)

=2^i/exp(π /2)

z が単位円周上にある場合には

z^i =(cos θ +isin θ)^i = (exp(i θ))^i = exp(− θ)

これは実数である。$\theta = \pi/2$ の場合が i の i 乗である。

また一般の複素数 z=3+4i の場合

$\log(z)=\log(abs(z))+iArg(z)$

$abs(z)=\sqrt{}(3^2+4^2)=5$, であり

$Arg(z)=(\tan^{-1}(4/3)=0{,}9272\cdots.=\theta$ とする。

$z^i=\exp(i(\log(5)))+i\theta)=\exp(i(\log(5)))/\exp(\theta)$

$=5^i/\exp(\theta)$

$=(\cos(\log(5))+i\sin(\log(5))))/\exp(\theta)$

すなわちまとめて $r^i/\exp(\theta)$

$=(\cos(\log(r))+i\sin(\log(r)))/\exp(\theta)$

と書ける。

z=(2+i) の (1+2i) 乗は

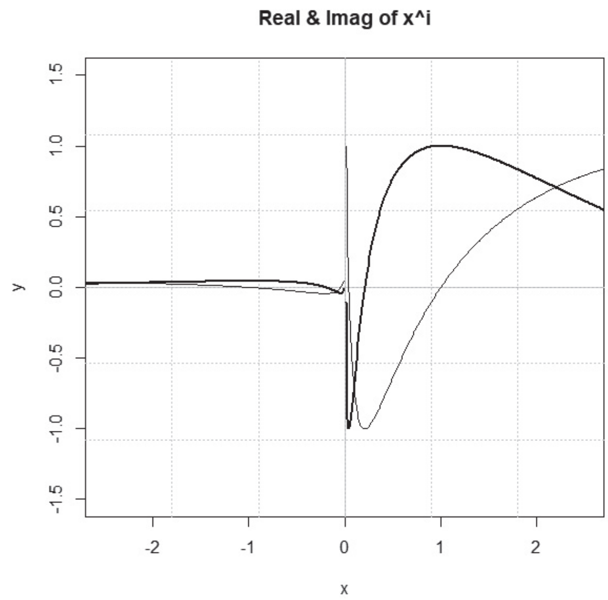
$(2+i)^{(1+2i)}=(2+i)(2+i)^{2i}$

$=(2+i)(4+4i-1)^i$

表 2　$(2+i)^{(1+2i)}$ の値

ツール	入力	出力
R	(2+1i)^(1+2i)	− 0.4259+7.753i
WolframAlpha	(2+i)^(1+2i)	
gnuplot	print {2,1}**{1,2}	{− 0.4259,7.753}

WolframAlpha では
r = 0.885（半径），θ = 118.8°（偏角）　と表され
さらに複素平面上に図示される。
$y = a^x$　の値は a や x がどんな複素数でも求まることがわかった。
なお x^i の値は x>0 なら
cos(log(abs(x))+isin(log(abs(x)) だが x<0 では上記値を exp(π)～23.14 で割ったものになり y=x^i のグラフは図のように実数でも虚数でも x = 0 で不連続になる。

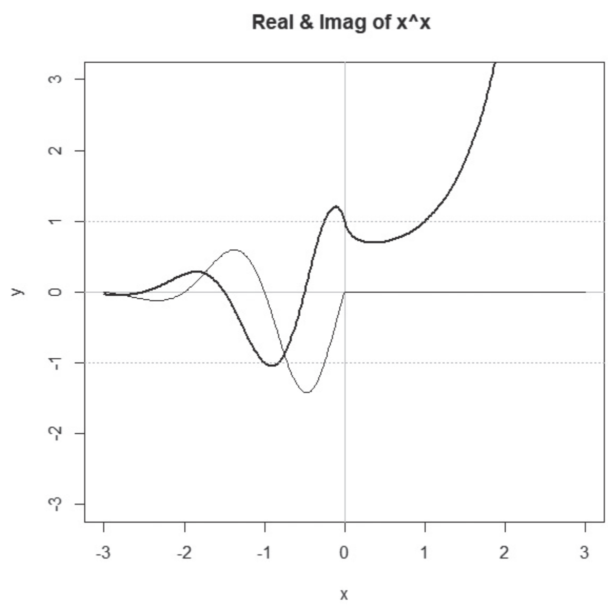


第 4 図　$y=x^i$

$x^x=1$ の解

非線形方程式 $x^x=1$　を解いてみよう。勘の鋭い中学生なら x = 1 という解を見つけるだろう。優秀な高校生なら両辺の対数を取って xlog(x)=0　だから x = 0 または log(x)=0 すなわち解は x = 0,1 と答えるだろう。正確にいうと $f(x)=x^x$ において x=0 は f(x) の定義域ではないが，x → 0 の極限で $x^x \to 1$ となることは解析的に証明されているので解に含めてもいい。

では他に解はないものか？ y=f(x) の実部と y=1 のグラフは x 軸と 3 点で交わっている。その交点は x=1，0　そして 3 つ目の解は x= − 0.25 近傍に求められる。



第 5 図　$y=x^x$　y=1　y= − 1 も併せて描いてある

x の絶対値を r=abs(x)　偏角を t=Arg(x) とする。
x^x = r^xexp(txi)
　= r^x (cos(tx)+isin(tx))
実部は r^x (cos(tx)) だから
WolframAlpha で x^x=1 を解くには
abs(x)^x*(cos(x*Arg(x)))=1 と入力すればよい。
解として－ 0.25，0，1 が出力される。

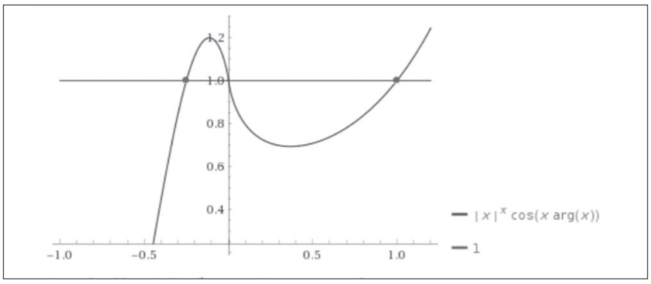


図 6a　x^x=1 WolframAlpha による解

R ではグラフを描きグラフと x 軸との交点を挟む 2 点をクリックすれば，クリックした点の x が p1，p2 に収められその 2 点の間の解が－ 0.25 と求まる。

```
plot(0,0, xlim = c(-3, 3),ylim = c(-3,3),type =
"n",xlab = "x", ylab = "y")
abline(h=0,col=8);abline(v=0,col=8);
###### x<0 ###########
x=seq(-3,0,by=0.02)
r=abs(x);t=pi
Rx=r^x*(cos(t*x))-1 # y=Re(x^x)
points(x,Rx,lwd=1,type="l")
###### x>0 ###########
x=seq(0,3,by=0.02)
r=abs(x);t=0
Rx=r^x*(cos(t*x))-1 # y=Re(x^x)
points(x,Rx,lwd=1,type="l")
####２点をクリックして解を求める####
z=locator(2); points(z,col=4)
  p1=z$x[1]  ;  p2=z$x[2]
(ans=uniroot(f,c(p1,p2)))
text(-2,-0.5,ans$root)
```

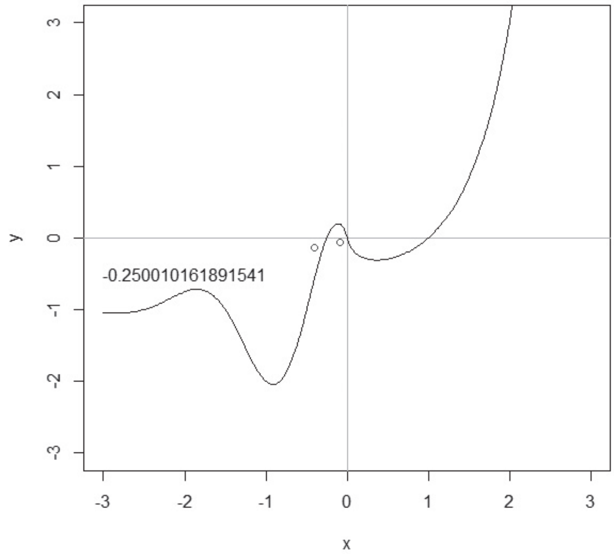


図 6b　x^x=1　R による解

なお abs(x)^x*(cos(x*Arg(x))) の極小値は －1.04635(x= － 0.910596) であるから 方程式 x^x=a において a がこの値より大きければ同様に解くことができる。極値は WolframAlfa で求まる。
また x^x= － i では
x^x の虚部は (abs(x))^x* (sin(x*Arg(x))) だから
abs(x)^x* (sin(x*Arg(x)))= － 1 と入力すれば
x= － 0.25，－ 0.712 と解ける。

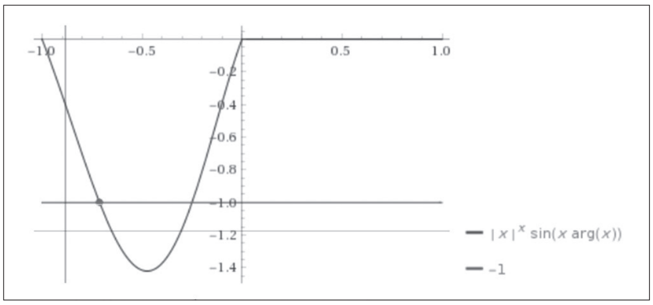


図 7　x^x= － i の解

x= － 0.25 は x^x=1，x^x= － i 両方程式の解である。実 (－ 0.25)^(－ 0.25) の値を計算すると 1 － i である。

表 3　x^x の値

x	Re(x^x)	Im(x^x)
－ 1	－ 1	0
－ 0.712	－ 0.787	－ 1
－ 0.25	1	－ 1
0	1	0
1	1	0

付記

複素数 z の t 乗を複素平面上にプロットしてみると下図のような螺旋が描かれた。t は－３から３まで変動する実数パラメーターである。○印は t=0.5, t=1.1 の時の位置である。

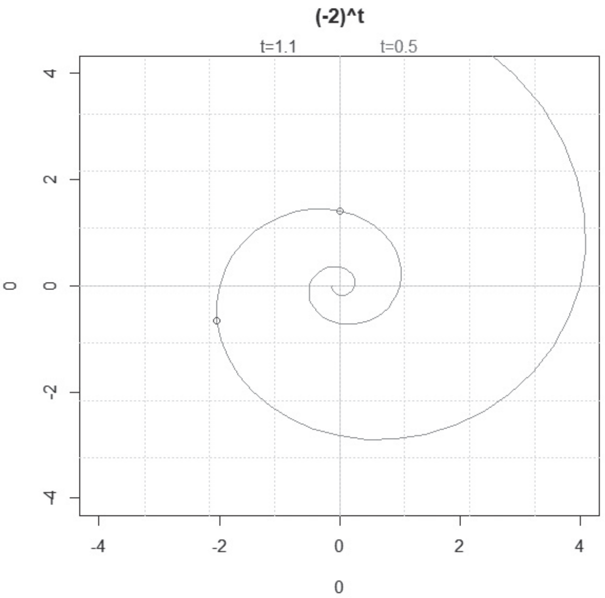


図 8　－ 3<t<3　x=Real(－ 2)^t,y=Imag(－ 2)^t の複素平面上のプロット

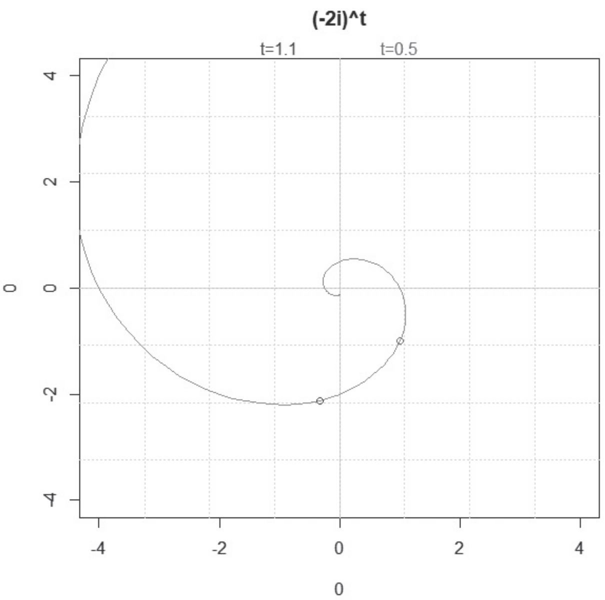


図 9　－ 3<t<3　x=Real(－ 2i)^t,y=Imag(－ 2)^t の複素平面上のプロット

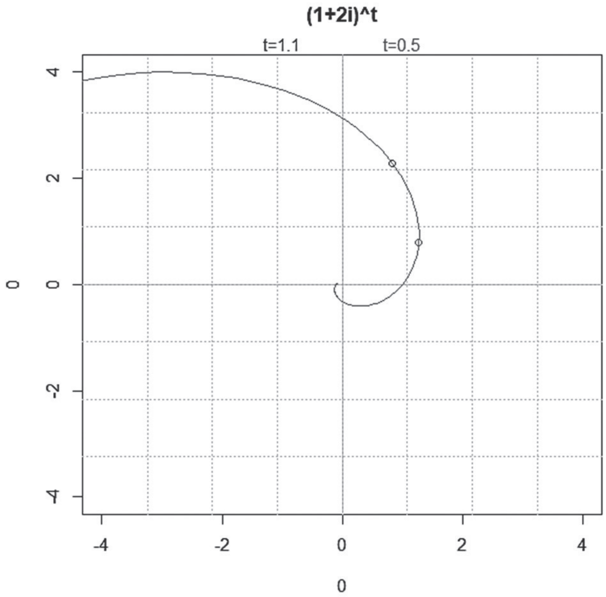


図 10　－ 3<t<3　x=Real(1+2i)^t,y=Imag(1+2i)^t の複素平面上のプロット

```
plot(0,0,xlim=c(-4,4),ylim=c(-4,4),type="n")
abline(h=0,col=8) ; abline(v=0,col=8) ;
grid(8,8)
t=seq(-3,3,by=0.05)
z0=(2i);z=z0^t
points(z,type="l",col=3)
Re(z0^0.5);Im(z0^0.5)
points(Re(z0^0.5),Im(z0^0.5),col=6)
points(Re(z0^1.1),Im(z0^1.1),col=4)
title("(2i)^t")
mtext("t=0.5",3,col=6,at=1)
mtext("t=1.1",3,col=4,at=-1)
```

参考文献

[1]　https://ja.wikipedia.org/wiki/I%E3%81%AEi%E4%B9%97

[2]　https://ja.wolframalpha.com/

◆著者紹介

作花　一志　Kazushi Sakka

京都大学大学院理学研究科博士課程修了（京都大学理学博士）

京都情報大学院大学教授

日本応用情報学会理事（編集担当）