

3D 図形の描画法

Drawing of 3D Figures

作花 一志 (京都情報大学院大学)

Kazushi Sakka (The Kyoto College of Graduate Studies for Informatics)

Abstract

Drawing methods of 3D figures are discussed by using gnuplot and R programming. Some applications for regression analysis, differential equations and planetary orbits are presented.

1. はじめに

3次元図形は想像するのも描くことも困難だがPCで描くには次の3つの方法がある。

- ・ブラウザで $z = f(x,y)$ を Google 検索
- ・gnulot
- ・R プログラミング

第1の方法は最も簡単ですがすぐに実行できるが関数形が $z =$ で与えられた場合だけである。第2第3の方法ではシステムをインストールして簡単なプログラムコードを書いて実行することになるが、関数形が媒介変数や極座標で表示されている場合また数値で与えられる3次元ベクトルも描くことができる。

2. gnuplot で描く 3D 図形

gnuplot は古くからよく使われるグラフ描画用のフリーソフトである。描画オプションが非常に豊富で2015年にVer5.0が公開された。またプログラミング機能は不十分であるが、増えつつある。 $z = x^2 - y^2$ を描くには

```
set xrange [-10:10]
set yrange [-10:10]
set palette defined(1 "blue",2 "green",3 "red")
set pm3d
set isosamples 30
unset surface
splot x**2-y**2
```

3D 描画には splot を用いる。最後の行の命令だけでもグラフは描ける (図1) が他の行を加えるとカラフルな図を描くことができる (図2)。第1行第2行は x, y の描画範囲の定義, 第3行はカラーパレットの定義, 第4行はカラー描画の指定を表している。第5行第6行は細かいオプション指定で, それぞれサンプル解像度, 網目表示なしを指示する。

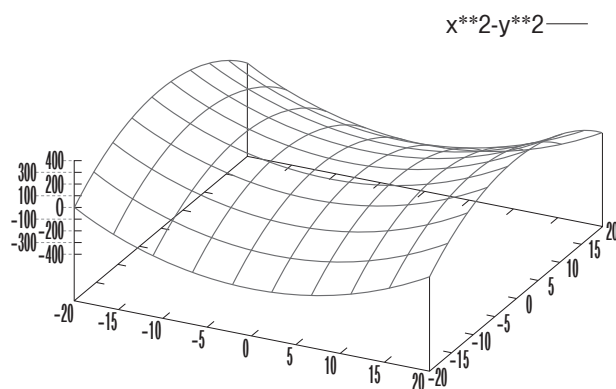


図1 $z = x^2 - y^2$

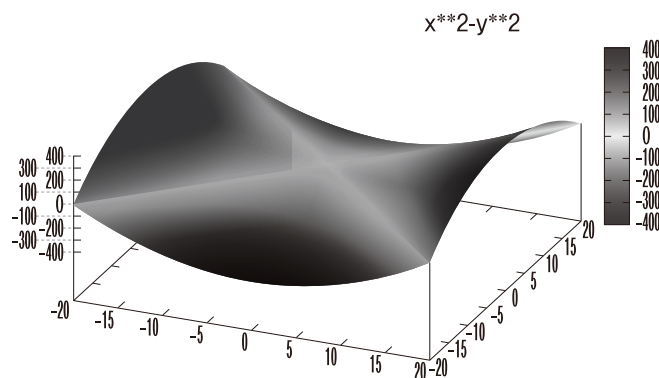


図2 $z = x^2 - y^2$

サイクロイド面を表示するには媒介変数 (u,v) 宣言をして

```
x = u - sin(u)
y = v
z = -1 + cos(u)
```

をプロットする。

```
set parametric
set urange[-pi:pi]
set palette defined(0 "black", 1 "blue", 2 "green", 3
"cyan", 4 "yellow", 5 "magenta")
splot (u-sin(u)), v, -1+cos(u) with pm3d
```

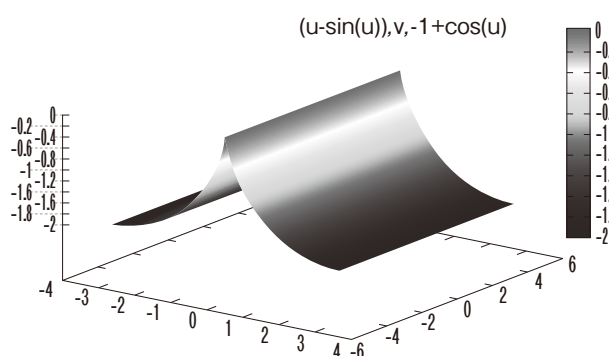


図3 サイクロイド面

これは有名な最速降下曲面で、寺院の屋根などに使われている。頂上に降った雨がこの曲面に沿って移動するとき要する時間は最も短い。

splot "テキストファイル.txt" using 1:2:4
という命令でテキストファイルの第1列、第2列、第4列の数値をx, y, zとして表示することができる。他のプログラミング言語で求めた数値をマトリックスとして算出しデータファイルにすることが多い。図4は渦状銀河NGC2403のスペクトルをmakalliを用いて輝度のデータファイルを作り3D表示させたものである。

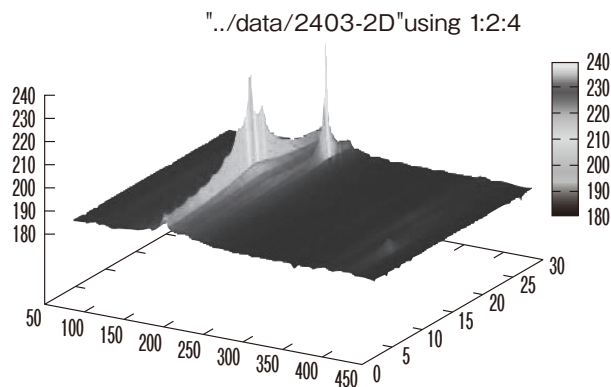


図4 テキストファイルより

3. Rで描く3D図形

3-1 関数のプロット

Rで3Dグラフィックの方法はいくつかあるが、ここではrglライブラリ、persp3d関数を使って鳥瞰図を描いてみよう。曲面は前述の関数 $z = x^2 - y^2$ である。

```
library(rgl)
x <- seq(-10, 10, length= 100)
y <- x
f <- function(x, y) { x^2-y^2 }
z <- outer(x, y, f)
par3d(windowRect=c(400, 200, 1000, 1000))
persp3d(x, y, z, col = c("green", "gold"))
```

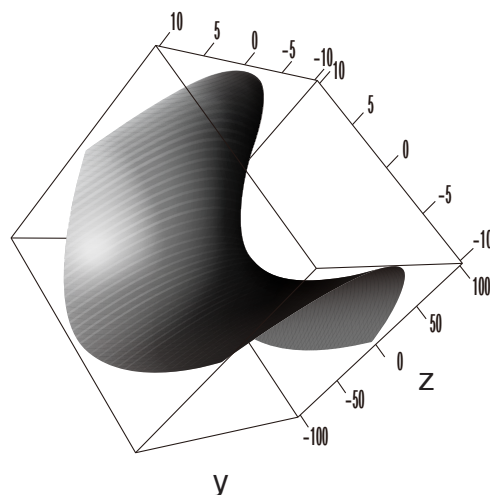


図5 $z = x^2 - y^2$

3-2 重回帰分析

2次元の場合ベクトルx, yが与えられるとその点列に最もよくフィットする直線(回帰直線)が求まるように、3次元の場合は回帰平面が求まる。lm関数を用いて重回帰係数を求めpersp3d(x, y, z)で鳥瞰図を描く。

```
alm<-lm(z~x+y) # 重回帰3元
coef(alm) [1], [2], [3] # 重回帰係数
x <- seq(0, 20, length= 50)
y <- seq(50, 100, length= 50)
zf<-function(x, y)
coef(alm) [1]+coef(alm) [2]*x+coef(alm) [3]*y
z=outer(x, y, zf)
persp3d(x, y, z, col=3, add=T)
```

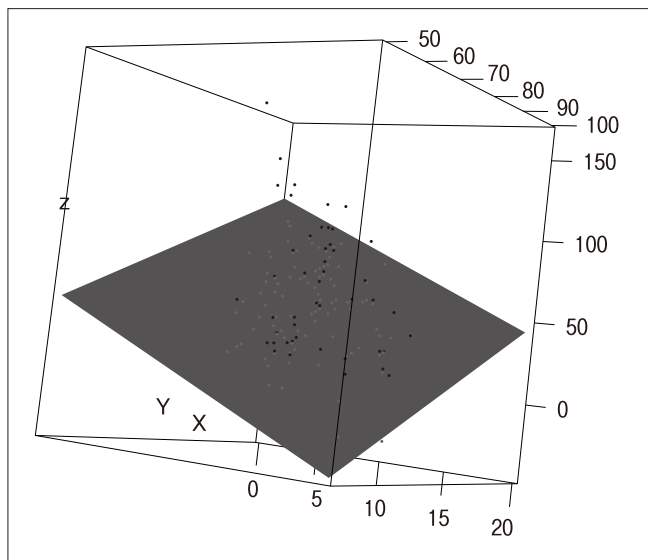


図6 最良近似平面

黒点は与えられたデータ、赤点は予測値で最良近似平面上にある。

3-3 連立微分方程式

線形連立微分方程式の解を一次変換・固有値の応用として求める方法が[1]に紹介されている。微積分と線形代数との融合問題として特筆される。

$$dX/dt = 2X - Y - Z$$

$$dY/dt = -X + 3Y$$

$$dZ/dt = -X + 3Z$$

未知数ベクトル 係数の行列

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{とすると}$$

$d\mathbf{v}/dt = \mathbf{A}\mathbf{v}$ である。

A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, それに対する固有ベクトルを $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ とする。固有値は `eigen(A)$values` より, 固有ベクトルは `eigen(A)$vectors` より求まる。一般解は c_1, c_2, c_3 を任意定数として

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{u}_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 \mathbf{u}_2 \exp(\lambda_2 t) + c_3 \mathbf{u}_3 \exp(\lambda_3 t)$$

であり初期値を $X=1, Y=1, Z=-1$ とすると $(c_1, c_2, c_3) = (1/3, 1, 1/3)$ であるから

$$X = (2\exp(t) + \exp(4t))/3$$

$$Y = (\exp(t) + 3\exp(3t) - \exp(4t))/3$$

$$Z = (\exp(t) - 3\exp(3t) - \exp(4t))/3$$

となり t をパラメータとして 0 から 2 までグラフを描いたものが図7である。非線形の場合は数値的

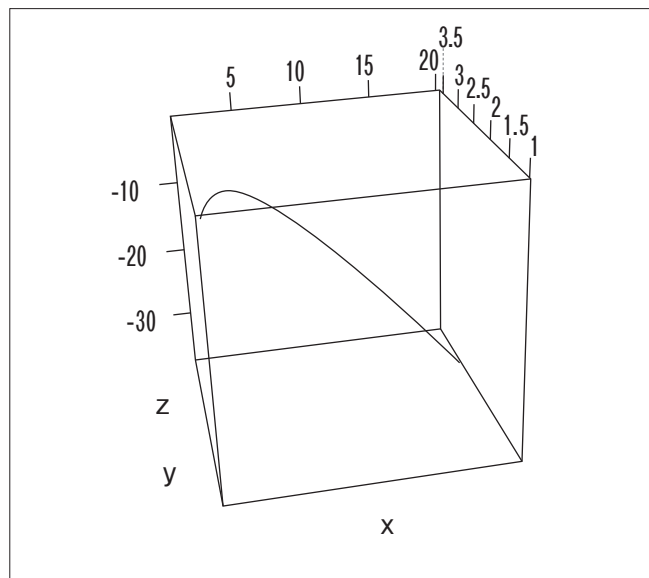


図7 線形連立微分方程式
 $\mathbf{v}' = \mathbf{A}\mathbf{v}$ の解

の解くしかないが, 解を 3D で表示すると興味ある結果が得られる。

初期値を $X=1, Y=1, Z=1$ として

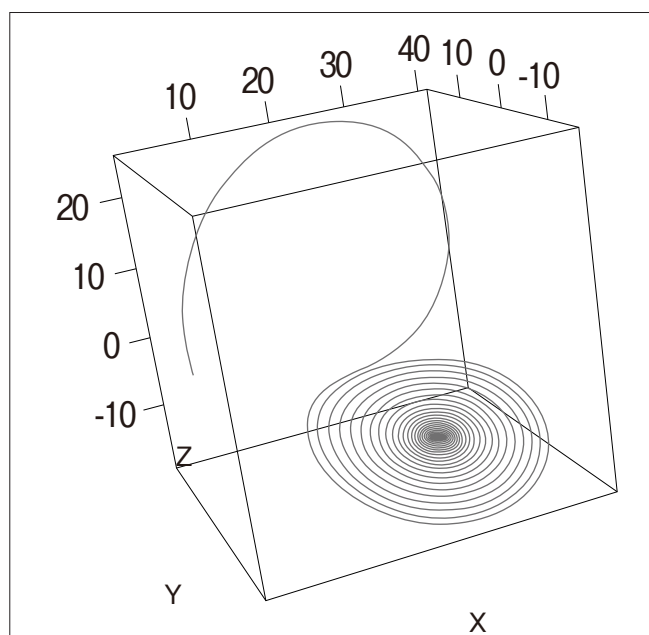
$$dX/dt = aX + YZ$$

$$dY/dt = b(Y - Z)$$

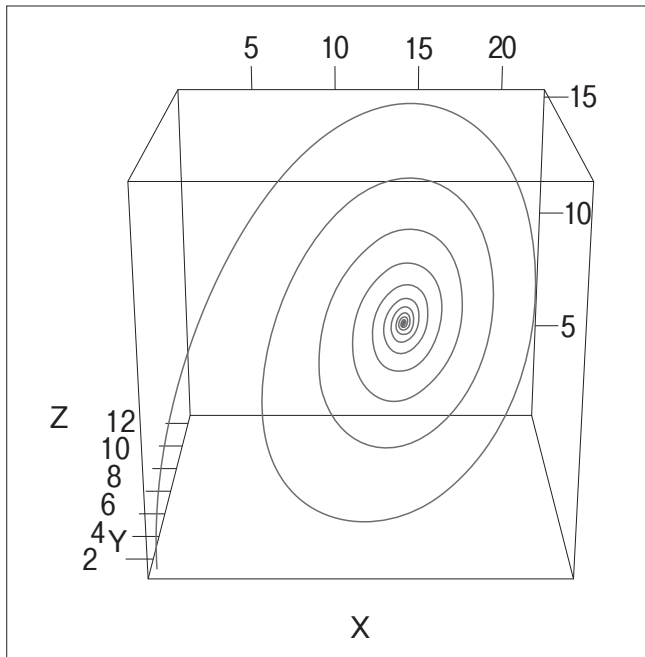
$$dZ/dt = -X*Y + c*Y - Z$$

をさまざまなパラメータについて解いてみよう。解法は[2]に従って, `ode` 関数を用い, t は 0 から 100 までステップ 0.01 で計算し, 結果は 10000 行 4 列のマトリクスに収めた。

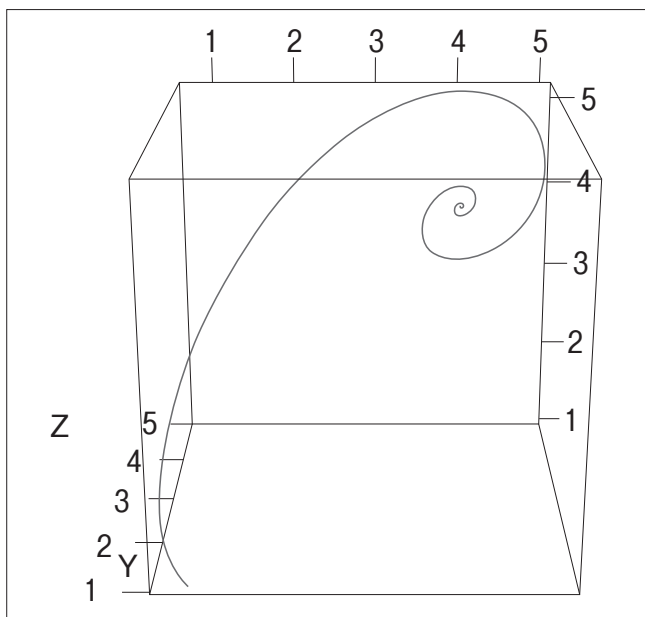
$a=-4, b=-10, c=25$ の場合の解を図示すると



$a = -4$ $b = -10$ $c = 15$ の場合は



$a = -4$ $b = -10$ $c = 5$ の場合は



a の値を変化させても興味ある図が描かれる。

$a = -8/3$, $b = -10$, $c = 28$ の場合にはカオスで有名なローレンツのアトラクターが描かれる

いずれも初期点は左端 $(1, 1, 1)$ であり、左方で収束する。

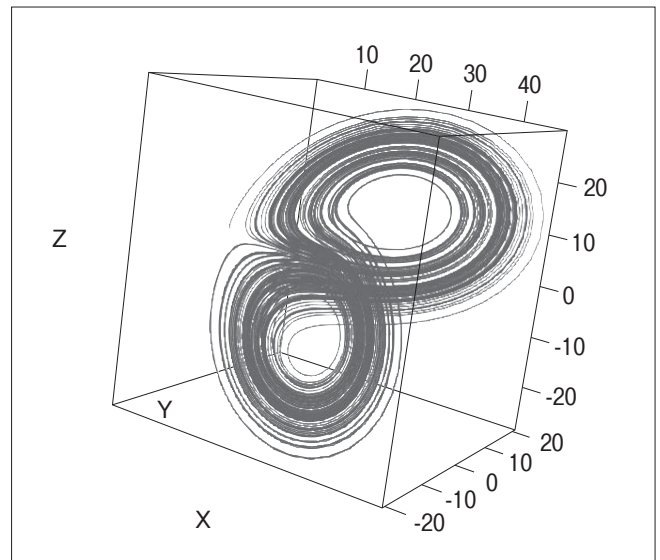


図8 非線形連立微分方程式の解

3-4 惑星の公転軌道

惑星はケプラーの法則に従い太陽を焦点とする楕円運動する。軌道の形状は軌道要素といわれる6つのパラメータで決まる [3]。各軌道要素 a , e , i , Ω , ω , M は惑星ごとの定数（正確には2体問題ではないので長期間にわたるときは変化を考慮しなければならない）である。楕円の長半径を a , 離心率を e ($0 \leq e < 1$) とし、楕円上の点はパラメータ t ($0 \leq t \leq 2\pi$) を使って

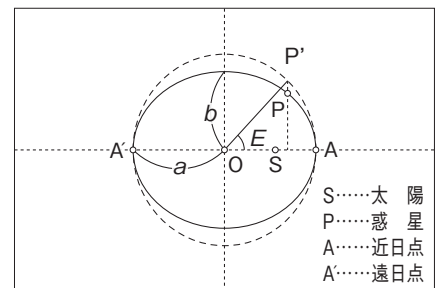


図9 楕円軌道

$$X = a \cdot \cos(t)$$

$$Y = a \cdot \sin(t) \sqrt{1-e^2} \text{ と書ける。}$$

これらを次式で太陽中心の $x y z$ 座標（日心黄道座標という）に変換する。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos i \\ 0 & \sin i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X - ae \\ Y \end{pmatrix}$$

惑星は軌道面上で地球は黄道面上で公転し、両面が交わってできる角 i , Ω , ω は図10の通りである。

プロットするには `plot3d(x, y, z)` を使えばよい。

さらにこの図を `planet` というフォルダーに収めて Web にアップロードするには

writeWebGL(dir="planet",width=700,height=500)

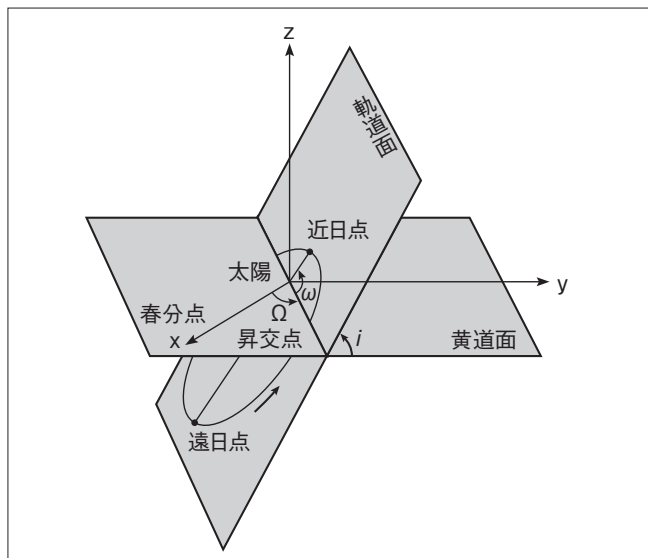


図 10 日心黄道座標

8 惑星の軌道面はすべて異なるが、実際にはそれらの i は 10° 以下なのでほぼ同じ平面上で、同方向に公転している。ただし彗星ではほぼ垂直 ($i \sim 90^\circ$) になったり、公転が逆方向 ($i > 90^\circ$) になることも珍しくない。図 11 の扁平な楕円はハレー彗星の軌道である。

R プログラミングではこのような計算結果を視覚的に表示する時に有効である。

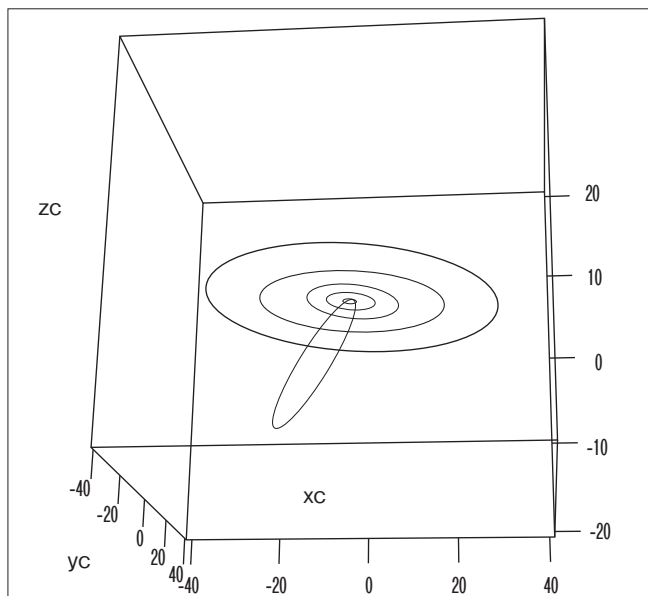


図 11 8 惑星とハレー彗星の公転軌道

本研究は「国際化を考慮した社会的ネットワーク指向の次世代 e ラーニング基盤の開発（日本学術振興会科学研究費課題番号 16H03087，研究者代表・岡本敏雄氏）」の研究補助金のサポートの基で行われている。

【参考文献】

- [1] 田島一郎「線形代数」共立出版 p174, 970
- [2] 作花一志 NaisJ. Vol.10, p61, 2015
- [3] 作花一志 中西久崇「天文学入門」オーム社 2001

◆著者紹介

作花 一志 Kazushi Sakka

京都情報大学院大学教授。

京都大学理学研究科宇宙物理学専攻修了，

京都大学理学博士 専門分野は古天文学，統計学。

元京都大学理学部・総合人間学部講師，

元京都コンピュータ学院鴨川校校長，

元天文教育普及研究会編集委員長