物理過程のシミュレーションと３Ｄ画像表示

京都情報大学院大学

作花 一志

はじめに

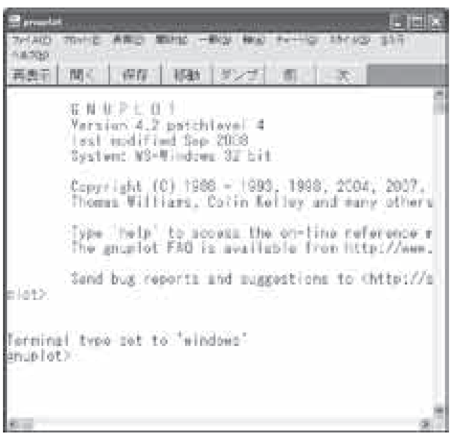
平面上のグラフ y=f(x) の概形は描けても，空間のグラフ z=f(x,y) となると想像することも難しい。ましてや実際に描くには非常に困難である。ところが近年 gnuplot，scilab，octave，metasequoia などのフリーウェアの性能が大幅にアップしてきた。誰でもインターネットからダウンロードして自由に使え，簡単なコマンド，スクリプトできれいな図を描くことができる。このうち metasequoia は描画機能は最も優れているが，計算機能はない。gnuplot はプログラミング初心者・未習者にとっても容易に習得できる。

2008 年 11 月 15 日に行われた第 4 回理数系教員指導力向上研修会（独立行政法人科学技術振興機構支援による）ではこれらによる作品例を紹介し，gnuplot の実習を行った。また TA を務めた本学大学院生が自分の研究テーマの一部である metasequoia による描画ついてコメントを行った。この小文では gnuplot を使って 3 次元描画する方法と結果を紹介する。

ダウンロードとインストール

最新版は［1］からダウンロードできる。通常通りインストールして bin\gnuplot.exe をダブルクリックすると起動するが，すべて英語表記である。そこで同じフォルダーにある wgnuplot.mnu のファイル名を wgnuplot0.mnu に , また wgnuplot-ja.mnu のファイル名を wgnuplot.mnu と変更すると図 1 のようにメニューが日本語で表示される。また右クリック Choose Font よりフォントも変えられる。

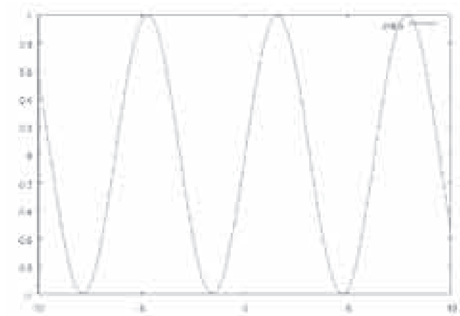
gnuplot 解説はウェブサイトにたくさん載っているので基本操作などはそれらを参照されたい。



［図1］起動画面

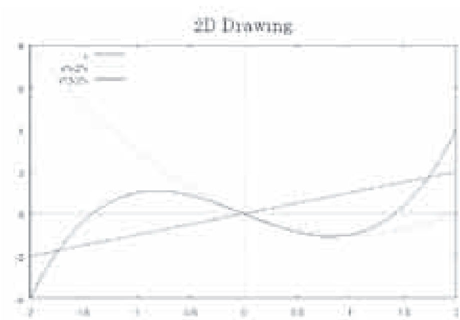
グラフ描画

２次元プロットには plot を使う。plot sin(x) という命令だけで *y=sinx* のカーブが描かれる。x の範囲は set xrange[-5:5] のようにするか，または plot [-5:5] sin(x) と指定するが，指定がなければ－ 10 ～ 10 として扱われる。



［図2］
y=sinx のプロット

y の描画範囲は　yrange[-2:3] のように指定できる。
座標軸を描くには　set zeroaxis
線を太くするには plot のオプションに lw 2 を付ける（デフォルトは lw １）。
線の色を指定するには lt ○とする（デフォルトは 1 赤）。
plot x**3-2*x lt 3 lw 2
複数のグラフを描くには数式をカンマで区切ればよい。
plot x,x**2+2-x,x**3+2*x



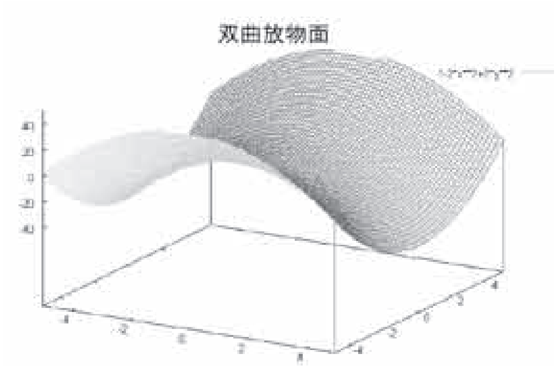
［図3］*y=x,x^2-2x,x^3+2x* が同一座標上に表示される。描画色は自動的に割り振られる。

```
# 図３
set border
set key left top
set ytics
set xtics
set xrange[-2:2]
set title"2D Drawing" font"Century,20"
plot x,x*x-2*x,x**3-2*x
```

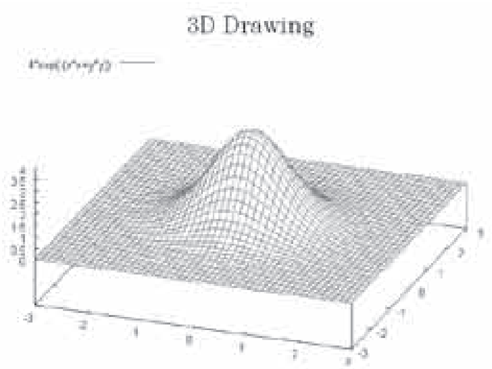
媒介変数を使う場合には plot の前に
set parametric と書けばパラメータ t が導入されるので，x(t) と y(t) を定義して
plot x(t),y(t)
とすればよい。
各コマンドをエディタに書いて plt という拡張子で保存すれば，すぐに実行できるプログラムとなる。# はコメント文である。

```
# 楕円
set parameteric
set trange[-pi:pi]
x(x)=10*cos(t)
y(t)=5*sin(t)
plot x(t), y(t)
```

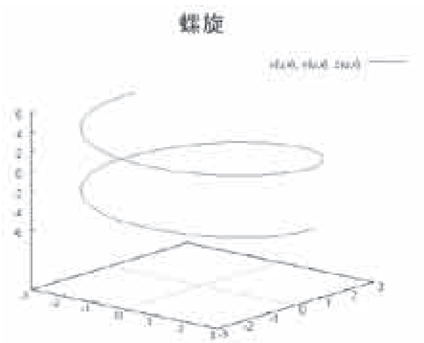
3 次元プロットには splot を使う。
平面曲面 z ＝ f(x,y)　には splot f(x,y)
図 4，9，10 は f(x,y) が 2 次式の，図 5，8 は指数関数の，図 7 は三角関数の例である。
直線曲線の場合にはパラメータ u と v を導入して x(u,v)，y(u,v)，z(u,v) を定義し
splot x(u,v),y(u,v),z(u,v) とする（図 6）。




```
# # 図 4　　z=x2-y2
set ytics
set xtics
set hidden3d
set xrange[-5:5]
splot x**2-y**2
set title " 双曲放物面 " font"MSMincho,20"
```



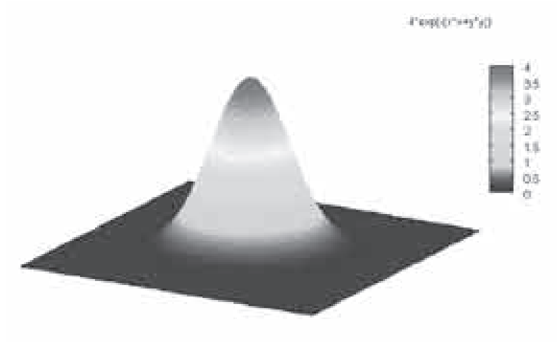

```
# 図 5  z=4exp(-x2-y2)
set isosamples 50
set xrange[-3:3]
set yrange[-3:3]
set hidden3d
splot 4*exp(-(x*x+y*y))
set title "3D Drawing" font"Century,20"
```



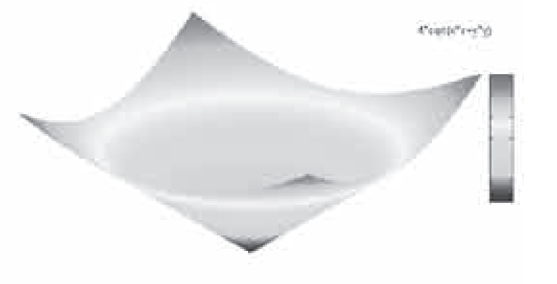

```
# 図 6  (3sin(u),3cos(u),u)
set title " 螺旋 " font"MS Gothic,20"
set urange [-5:5]
set vrange [-5:5]
set isosamples 30
x(u,v)=3*sin(u);y(u,v)=3*cos(u);z(u,v)=u
splot x(u,v),y(u,v),z(u,v)
```

```
# タイトル　フォントを指定
set title " 曲面と平面 " font"MSMincho,18" tc rgb "#0000ff"
# ラベル　　フォント，位置 を指定
set label1  sprintf(" 原点 ") at 0,0 font"MSMincho,12" tc rgb "#ff0000"
set label2  sprintf(" 京都 ") at 3,5 font"MSMincho,12" tc rgb "#0000ff"
show label
```

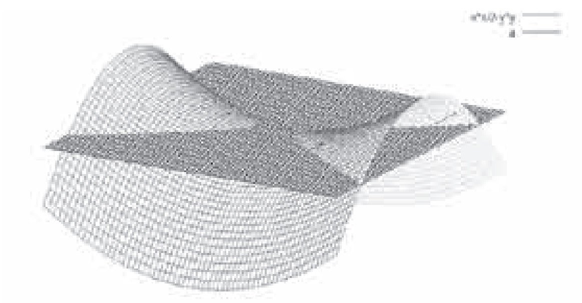
```
#　図 7　z=4sin( √ (x2+y2))
set palette defined(0 "blue",1 "green",2 "cyan",3 "yellow",4
"pink",5 "red")
set noborder
unset xtics; unset ytics; unset ztics
unset zeroaxis
set isosamples 100
splot 4*sin(sqrt(x**2+y**2)) with pm3d
```



```
#   図8   z=4exp(-(x2+y2))
set xrange[-3:3];set yrange[-3:3]
splot 4*exp(-(x*x+y*y)) with pm3d
```



```
#   図9   円錐面 z=4 √ (x2+y2)
splot 4*sqrt(x*x+y*y)with pm3d
```



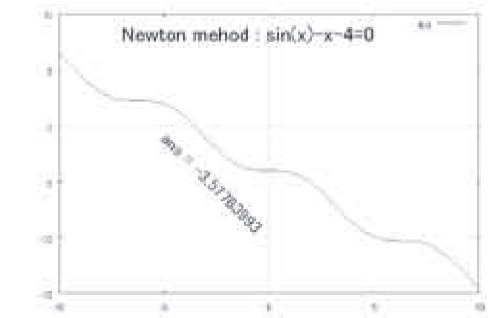
```
# 図10   z=x2/2-y2 (双曲的放物面) と
z=4 (平面)
set isosamples 60
set xrange[-20:20]
set yrange[-20:20]
set hidden3d
splot x*x/2-y*y,4
```

■ 数値計算 ■

gnuplotによる数値計算の例を示す。非線形方程式をニュートン法で解く方法は数値計算の代表的な例であり，多数の教科書に載っている。ここではケプラーの方程式 $x=e\ sinx+M$（eとMは定数）を解くために

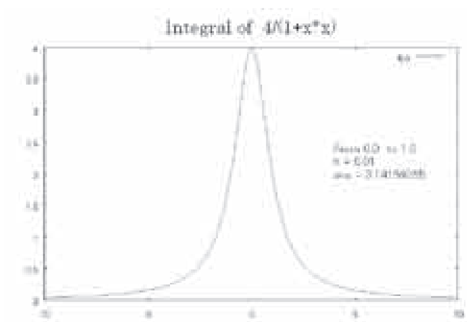
$f(x)=e\ sinx+M-x$

のグラフを描き，y＝0との交点のx座標が解となる。



［図11］
ケプラーの方程式の解

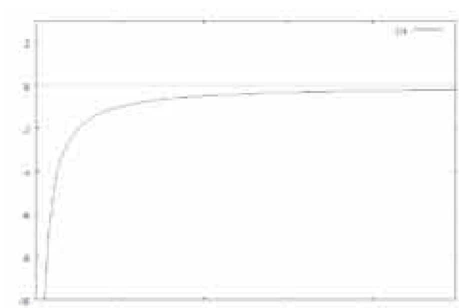
シンプソンの公式により $f(x)=\frac{4}{x^2+1}$ を0から1まで数値積分する。実はf(x)の原始関数は $4tan^{-1}x$ であり，この定積分は解析的に求められ，π である。



［図12］数値積分
$\int_0^1 f(x)dx=\pi$

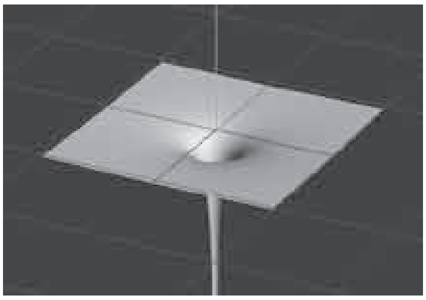
■ 物理過程 ■

重力源からrの距離における重力ポテンシアルの値は $V(r)=-\frac{1}{r}$ でそのグラフは直角双曲線（図13）であるが，$r=\sqrt{x^2+y^2}$ とし3D描画すると図14のように描かれる。さらに数値の計算はscilabで，描画はmetasequoiaで行った結果を図15に示す。表面は滑らかにまた原点近傍もきれいに描かれる。



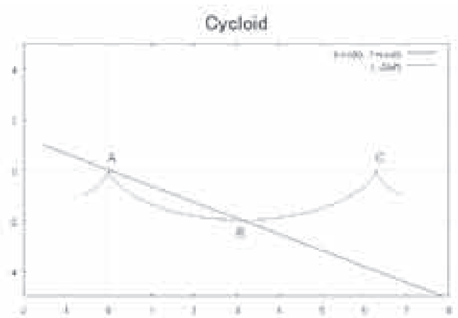
［図13］
重力ポテンシアル（2D）

［図14］重力ポテンシアル(3D gnuplot)



［図 15］重力ポテンシアル (3D metasequoia)

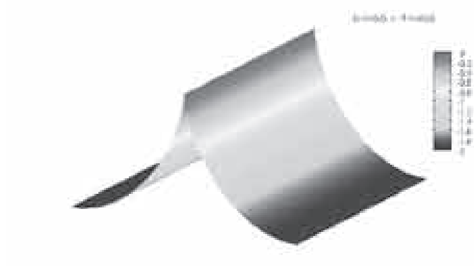
重力が一定 g の場で 2 点を最短時間で結ぶ軌跡は何か？この問題はすでに 300 年前に解かれていて，答は直線ではなくサイクロイドという曲線である。スイスの数学者・物理学者ベルヌーイが全ヨーロッパの数学者に期限付きで問題を出したところ，4 人の著名な数学者が正解を送ったそうだ。そのうちの 1 人ニュートンは，1 晩で解いたと言われている。サイクロイドの軌跡は $x=a(t-\sin t)$, $y=a(\cos t-1)$ で表され，a=-1 場合は図 16 のように描かれる。A を始点，B を極値点として t について -π/2 から 5π/2 までの値をプロットした。A 点（t=0 で）から B 点（t=π）までの所要時間は $2\pi/\sqrt{g}$=1.00 秒で，斜面に沿って落下する時間 $\sqrt{(\pi^2+4)/g}$=1.19 秒よりも短い。A 点より自由落下した小球はサイクロイドカーブに沿って運動するが，最下点 B で最も速く，B 点を越すと次第に遅くなり，C 点 (t=2π) では速度 0 になり，その後は繰り返す。A 点を京都，C 点を東京として，サイクロイドに沿っていけば，その 500km をわずか 10 分弱でたどり着く。しかも重力エネルギー以外は不要である。ただし B 点の深さは約 200km となるのでこのようなトンネルを掘ることは実際には無理である。



［図 16］サイクロイド曲線

上図の y 値を z 値に移し A 点近傍のサイクロイド面を描いてみよう (図 17)。この形状は神社寺院の屋根によく使われている。雨水が最も速く落下するよう建築時に工夫されたものと言われている。

紐や鎖の両端を水平に持って垂らす時にできる曲線は懸垂線（カテナリー）と言われるカーブであり，放物線に似ているが $y=a\cosh(x/a)$ で表される。この値を z 軸に y 軸はフリーにしてプロットしたものが図 18 であり，この形は橋梁や寺院の門などに使われている。



```
#　図 17　サイクロイド面 (u-sin(u),v,-1+cos(u))
set parametric
set urange[-pi:pi]
splot u-sin(u),v,-1+cos(u) with pm3d
```

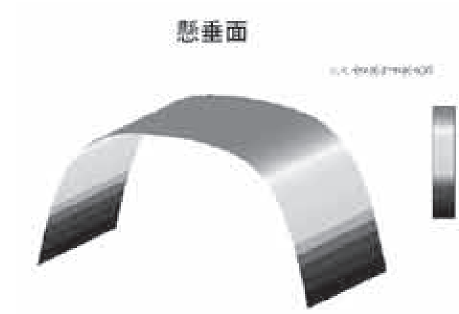
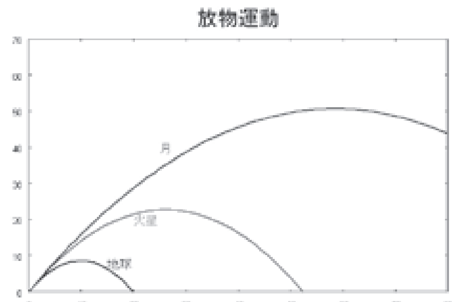


図 18　　懸垂面
（u ,v,-cosh(u)）

図 19 は地球，火星，月においてボールを初速度 15m/s 仰角 60°で投げ上げたときの軌跡である。表面重力は質量／半径 2 で決まりほぼ 6:3:1 であるから，到達距離や頂上の高さはその逆比 1:3:6 となる。



［図 19］ボールの軌跡

他の例は筆者のサイト［5］をご参照ください

［1］http://sourceforge.net/projects/gnuplot/
［2］http://t16web.lanl.gov/Kawano/gnuplot/
［3］http://gnuplot.sourceforge.net/demo/
［4］http://k-sakabe.com/gnuplot/
［5］http://www.kcg.ac.jp/kcg/sakka/math/num/gnuplot/3d/gnu.htm

作花　一志
sakka　kazushi
京都情報大学院大学教授
経歴はアキューム 17 P に掲載